**UNIVERSITE SULTAN MOULAY SLIMANE**

**ECOLE NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUE KHOURIBGA**

**Département Mathématique et Informatique**

Master Big Data Et Aide A La Décision

*Projet*

Réalisé par : Mohamed ELAAOUAM

Mohamed Amine BOULANOUAR

Fatima Ezzahra DECHRAOUI

**Programmation convexe et elliptique**

Encadré par : Mr. Youssef ELHADFI

Année universitaire 2023-2024

# Table des matières

[Table des matières ii](#_Toc155569093)

[Liste des figures iii](#_Toc155569094)

[Introduction générale 1](#_Toc155569095)

[Chapitre 1 : Convexité 2](#_Toc155569096)

[Chapitre 2 : Programmation convexe 5](#_Toc155569097)

[Chapitre 3 : Ellipticité 6](#_Toc155569098)

[Chapitre 4 : Programmation elliptique 7](#_Toc155569099)

[Chapitre 5 : exercice d’application 8](#_Toc155569100)

[Conclusion Générale 10](#_Toc155569101)

[Bibliographie 11](#_Toc155569102)

# Liste des figures

[Figure 1 : ensemble convexe et non-convexe 2](#_Toc155569108)

[Figure 2 : application convexe et non-convexe 3](#_Toc155569109)

[Figure 3 : application convexe, strictement convexe et elliptique 6](#_Toc155569110)

# Introduction générale

L'optimisation est un concept fondamental qui cherche à trouver la meilleure solution possible parmi un ensemble de solutions admissibles. Deux principaux types d'optimisation émergent selon la présence ou l'absence de contraintes. Dans le cas de l'optimisation sans contrainte, l'objectif est de maximiser ou minimiser une fonction spécifique sans imposer de limitations particulières. Ce type d'optimisation est particulièrement pertinent dans le contexte de la programmation convexe et elliptique.

La programmation convexe vise à optimiser des fonctions objectives convexes, ce qui simplifie le processus d'optimisation en permettant la convergence vers un minimum global. La programmation elliptique se concentre sur la maximisation ou la minimisation de fonctions elliptiques, présentant des propriétés mathématiques spécifiques qui influencent les stratégies d'optimisation.

L'importance de l'optimisation s'étend à divers domaines, de l'ingénierie à la finance, en passant par la science et l'informatique. Ce rapport se focalisera particulièrement sur l'optimisation sans contrainte, explorant les aspects liés à la programmation convexe et elliptique pour atteindre des solutions optimales dans un contexte spécifique.

# Chapitre 1 : Convexité

## **Définition**: ensemble convexe

Un sous-ensemble de est convexe si :

c.à.d. le segment est inclus dans 𝐶 :

### Figure 1 : ensemble convexe et non-convexe

## **Propriété** :

-Tout sous-espace affine de (en particulier ) est convexe.

-Tout boule de ,ouvert ou fermé , est convexe de .

-L’intersection de convexes de est un convexe de .

-Si , sont deux convexes de ,et , alors + et sont des convexes de .

-Si est un convexe de et est un convexe de ,leur produit cartésienne

× = est un convexe de .

## **Définition :** application convexe

Soit un ensemble convexe non vide et

L’application est convexe si :

c.à.d. dans le segment joignent (,) et (,) reste au-dessus de la nappe représentative de la fonction.

(resp. Strictement convexe).

### Figure 2 : application convexe et non-convexe

## **Propriétés :**

-Toute application affine, définie sur un convexe, est convexe et non strictement convexe.

-La somme d’application (resp. strictement) convexes est (resp. strictement) convexe.

-Si est (resp. strictement ) convexe et (resp. ) alors est (resp. strictement) convexe.

-Si est (resp. strictement) convexe et ,alors l’application est (resp. strictement) convexe.

-Une application convexe sur est continue en tout point de .

## **Théorème :** (caractérisation de la convexité)

Soit un ouvert convexe de et .

1. Si est différentiable sur , alors
2. est convexe sur .
3. est strictement convexe sur .

Géométriquement : en tout point la nappe représentative de est au-dessus de son hyperplan tangent.

1. Si est deux fois différentiable sur , alors
2. est semi-définie positive est convexe sur .
3. définie positive est strictement convexe.

# Chapitre 2 : Programmation convexe

On parle de la programmation convexe lorsque :

- est une application convexe, à optimiser sur :

Où :

L’ensemble est un sous-ensemble convexe non vide de ,

Les applications sont affines,

Les applications sont convexes.

## **Proposition :** (convexité du domaine)

- sont affines,

- sont convexes,

- convexe,

est un ensemble convexe de .

## **Théorème :** (Fondamentale en programmation convexe)

Soient un sous ensemble convexe de , une application convexe et .

1. Les conditions suivantes sont équivalents :
2. est un minimum local de .
3. est un minimum global de .

Si de plus est différentiable en , (i), (ii) sont équivalents à :

1. si , .
2. ,.
3. Si est strictement convexe, admet au plus un minimum, et un minimum de est toujours strict.

## **Remarque :**

est strictement convexe ( ) et n’admet aucun minimum (puisque )

# Chapitre 3 : Ellipticité

## **Définition :** application elliptique

Soit de classe .l’application est elliptique ou encore -elliptique, s’il existe un réel , tel que :

## **Proposition :**

Si deux fois différentiable, est -elliptique si et seulement si :

### Figure 3 : application convexe, strictement convexe et elliptique

# Chapitre 4 : Programmation elliptique

## **Théorème :**

Soit une application -elliptique .alors est coercive et strictement convexe sur un domaine convexe fermé et non vide de ,elle admet un unique minimum.

# Chapitre 5 : exercice d’application

## **Exercice 1 :**

On considère l’application définie par :

1. Que peut-on dire de l’existence des extrema globaux pour  ?
2. Déterminer tous les extrema globaux de .
3. Montrer le résultat.

Soit une application différentiable et un point critique de .alors est un minimum local de si et seulement si est convexe sur une boule ouverte centré en .

1. En déduire tous les extrema locaux de .

**Correction :**

1. Que peut-on dire de l’existence des extrema globaux pour  ?

Montrons que est coercive. Formons :

Le trinôme est minoré par et positif lorsque

Ainsi lorsque x ou y est suffisamment grand, .

Lorsque tend vers , tend aussi vers . Donc est coercive.

On déduit l’existence d’un minimum global et d’aucun maximum global.

1. Déterminer tous les extrema globaux de .

On cherche les extrema locaux. L’application est  ;son gradient est :

Ainsi à 4 points critiques A=(0,0), B=(0,) , C=(,0) et D=(,).

Sa matrice hessienne est :

est définie positive : D est une min locale. En A, B, C,

est semi-définie positive : on ne peut rien déduire…

Pour déterminer le(s) minimum(s) de il suffit d’évaluer en A, B, C, D.

(0,0) = 0 ; ( 0 , ) = ( , 0) =  ; ( , ) = 2 .

Ainsi le minimum de est D = ( , ).

1. Montrer le résultat.

Soit une application différentiable et un point critique de .alors est un minimum local de si et seulement si est convexe sur une boule ouverte centré en .

Soit un point critique de , c.à.d. .

min local de une boule ouverte centrée en tel que ,

la restriction de à est une application convexe.

Réciproquement, si est convexe sur une boule centrée en , alors :

est un min local de g.

1. En déduire tous les extrema locaux de .

Nous avons déterminé :

Le binôme ne garde pas un signe constant sur un voisinage de 0 sur aucun voisinage de A, B et C, la matrice hessienne ne reste semi-définie positive ou négative. n’est ni localement convexe ni localement concave sur un voisinage convexe de A, B ou C.

(c) ni A, ni B, ni C n’est un extremum local de .

# Conclusion Générale

La programmation convexe et elliptique sont deux domaines de l'optimisation mathématique qui revêtent une importance significative dans divers domaines, tels que l'ingénierie, la finance, et l'apprentissage automatique.

# Bibliographie

https://www.i2m.univ-amu.fr/perso/jean-philippe.preaux/pages/ensMASTEROptCon.htm